

## 1. Das elektrische Feld

$$\vec{F}_{21} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{21}^2} \cdot \hat{r}_{21} \quad (1.8)$$

Coulomb'sches Gesetz in vektorieller Form

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r_{21}^3} \cdot \vec{r}_{21} \quad (1.9)$$

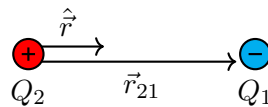


Abb. 1.5.: Geometrische Darstellung Abstands- und Einheitsvektor

### 1.2. E-Feld

Wir wissen bereits, dass die Kräfte zwischen Ladungen über eine Entfernung hinweg, ohne direkten physischen Kontakt oder ein Medium wirken. Wir erklären uns diese Kraftwirkung als Fernwirkung über die Idee eines Feldes als Vermittler. Physiker stellen sich solche Felder um alle Punktladungen  $Q$  herum vor. Wenn sich eine zweite Ladung, wir bezeichnen diese als „Probeladung“  $q$ , nähert, dann vermittelt das Feld Kräfte und es kommt zu einer Anziehung oder einer Abstoßung. An unterschiedlichen Orten ist die Kraftwirkung von  $Q$  auf eine Probeladung  $q$  von Betrag und Richtung her verschieden.

Unser Ziel ist es, die elektrischen Felder rund um die Ladung  $Q$  zu beschreiben, also wie groß das Feld in gewissen Abständen  $r$  ist und wie groß es abhängig von der Größe der erzeugenden Ladung  $Q$  ist. Uns interessiert dabei NICHT die Größe der Probeladung  $q$ , da wir das Feld der Ladung  $Q$  unabhängig von Probeladungen beschreiben möchten. Um dieses Problem zu umgehen, definieren wir das elektrische Feld  $E$  als Kraft  $F$  pro (kleine) positive Probeladung  $q$  (Gleichung 1.10). Wir bestimmen das elektrische Feld an einem Punkt, indem wir die (gemessene) Kraft auf eine kleine Probeladung  $q$  durch diese Probeladung teilen. Hierdurch ist das Ergebnis unabhängig von der Probeladung.

$$E = \frac{F}{q} \quad (1.10)$$

$E$ -Feld als Kraft pro Ladung

Da die Kraftwirkung zwischen zwei Punktladungen aus dem Coulomb'schen Gesetz bekannt ist, können wir das  $E$ -Feld um eine Punktladung  $Q$  einfach bestimmen. Wir bestimmen das  $E$ -Feld um  $Q$ , indem wir die Kraft zwischen  $q$  und  $Q$  durch die Probeladung  $q$  teilen. Wir können die Kraft über das Einsetzen des Coulomb'schen Gesetzes bestimmen (Gleichung 1.11). Wie Sie sehen, kürzt sich dann die Probeladung  $q$  heraus und der entstehende Ausdruck ist unabhängig von der Probeladung  $q$  (Gleichung 1.12). Wir beschreiben deswegen mit diesem Ausdruck den Betrag des Felds, das von der Ladung  $Q$  in verschiedenen Abständen  $r$  erzeugt wird.

## 1. Das elektrische Feld

$$E = \frac{F}{q} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot Q}{q \cdot r^2} \quad (1.11)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (1.12) \quad \text{E-Feld Punktladung}$$

Richtung des  $E$ -Feldes

Das  $E$ -Feld als Vermittler der elektrostatischen Kraft ist natürlich auch eine vektorielle Größe. Wir müssen also noch klären, in welche Richtung das  $E$ -Feld gerichtet ist. Man hat sich auf die folgende Konvention geeinigt: Die Richtung des  $E$ -Feldes um eine Ladung  $Q$  entspricht der Richtung der Kraft auf eine positive Probeladung. Wenn wir beispielsweise eine positive Ladung  $+Q$  haben (Abb. 1.6, a) und uns für die Richtung des  $E$ -Feldes an einem Punkt interessieren, so überlegen wir uns, was mit einer positiven Probeladung  $q$  an dieser Stelle passieren würde. Da wir wissen, dass eine positive Ladung von einer anderen positiven Ladung abgestoßen wird, muss die Richtung des  $E$ -Feldes wie eingezeichnet verlaufen, also von der positiven Ladung  $Q$  weg. Bei einer negativen Ladung  $-Q$  (Abb. 1.6, b) würde das  $E$ -Feld zur Ladung  $-Q$  hin zeigen, da eine positive Probeladung  $q$  eine Kraft in Richtung  $-Q$  erfahren würde. Sind die Ladungen  $+Q$  und  $-Q$  vom Betrag her gleich groß und wird das  $E$ -Feld im gleichen Abstand bestimmt, so ist das  $E$ -Feld vom Betrag her identisch, nur einander entgegen gerichtet.

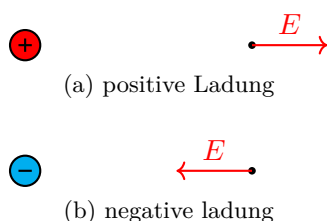


Abb. 1.6.: Richtung des  $E$ -Feldes abhängig von der erzeugenden Ladung

Es gibt keinen „tieferen“ physikalischen Grund, warum man sich dafür entschieden hat, über eine positive Probeladung  $q$  zu entscheiden, in welche Richtung das  $E$ -Feld gerichtet ist. Insgesamt erhält man über die Betrachtung von positiven Probeladungen jedoch weniger negative Vorzeichen in den Formeln, was an sich recht praktisch ist.

Superposition  $E$ -Feld

Analog zur Coulomb-Kraft überlagern sich  $E$ -Felder ungestört – wir können auch wieder nach dem Superpositionsprinzip die  $E$ -Felder mehrerer Ladungen (vektoriell) addieren, um das resultierende  $E$ -Feld an einem beliebigen Punkt im Raum zu bestimmen, beispielsweise in diesem eindimensionalen Fall am Punkt  $P$  zwischen der negativen Ladung  $Q_1$  und der positiven Ladung  $Q_2$  (Abb. 1.7). Auch hier bietet es sich wieder an, mit der Bestimmung der Richtung des Feldes zu starten. Das Feld  $E_1$ , das von der Ladung  $Q_1$  erzeugt wird, ist am Punkt  $P$  auf die negative Ladung hin, also nach links, gerichtet. Das Feld  $E_2$ , das von der Ladung  $Q_2$  erzeugt wird, ist am Punkt  $P$  von der positiven Ladung weg, also auch nach links gerichtet.

Das Feld  $E_1$  von  $Q_1$  am Punkt  $P$  wird wie unten dargestellt ausgerechnet und ist, wie wir vorhergesagt haben, negativ und somit nach links gerichtet. Die Einheit des Feldes

## 1. Das elektrische Feld

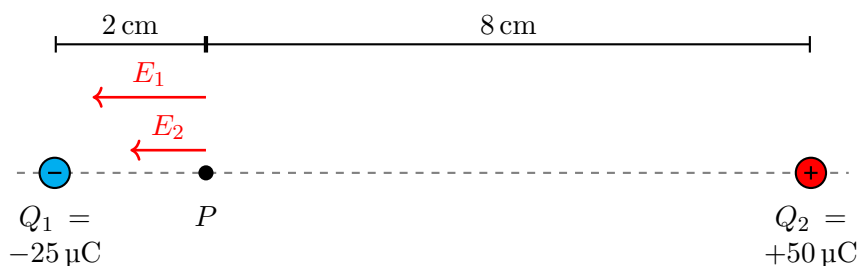


Abb. 1.7.: Superposition von  $E$ -Feldern

ergibt sich aus der Berechnung „Kraft pro Ladung“ als „Newton pro Coulomb“. Das Feld  $E_2$  von  $Q_2$  am Punkt  $P$  ist negativ und stimmt somit auch mit unserer Vorhersage der Richtung überein. Das resultierende Feld wird über die Addition der einzelnen Felder bestimmt. Aus der ungestörten Überlagerung der Felder ergibt sich ein Feld von  $-6,4 \cdot 10^8 \text{ N/C}$ . Das negative Vorzeichen bedeutet, dass das Feld nach links gerichtet ist.

$$E_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(-25 \mu\text{C})}{(0,02 \text{ m})^2} = -5,6 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

$$E_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(+50 \mu\text{C})}{(0,08 \text{ m})^2} = -0,7 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

$$E_{\text{res}} = E_1 + E_2 = -6,4 \cdot 10^8 \text{ N/C}$$

Es bleibt festzuhalten, dass das  $E$ -Feld von Punktladungen recht einfach mathematisch beschrieben werden kann. Punktladungen sind jedoch nicht sonderlich realistisch – in der Realität haben wir es vielmehr mit kontinuierlichen Ladungsverteilungen, wie zum Beispiel Stäben oder Platten, zu tun. Wir können das  $E$ -Feld an einem Punkt  $P$  in einem Abstand zu einer kontinuierlichen Ladungsverteilung zunächst nicht direkt bestimmen, da wir eigentlich nur mit Punktladungen arbeiten können. Wir greifen nun auf einen „Trick“ zurück, den man oft in der Physik und der Mathematik anwendet: Um etwas Neues, Unbekanntes zu bestimmen, modellieren wir uns die Situation so, dass wir auf etwas Bekanntes zurückgreifen können. In diesem Fall modellieren wir uns die kontinuierliche Ladungsverteilung als die Zusammensetzung unendlich vieler Punktladungen (Abb. 1.8).

*E*-Feld kontinuierlicher Ladungsverteilungen

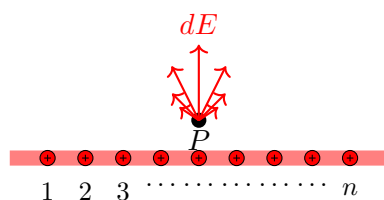


Abb. 1.8.: Kontinuierlich geladener Stab zusammengesetzt aus Punktladungen

Jede Punktladung erzeugt am Punkt  $P$  ein kleines Teil- $E$ -Feld  $dE$ . Für das resultierende  $E$ -Feld müssen wir alle Teil- $E$ -Felder aufaddieren (Gleichung 1.13). Wenn wir

## 1. Das elektrische Feld

die kontinuierliche Ladungsverteilung als Summe unendlich vieler Punktladungen modellieren, so geht die Summe in ein Integral über (Gleichung 1.14). Wir bestimmen das resultierende  $E$ -Feld durch die Integration über alle Teil- $E$ -Felder  $dE$ .

$$E_{\text{res}} \approx dE_1 + dE_2 + dE_3 + \dots + dE_n = \sum_{i=1}^n dE_i \quad (1.13)$$

$$E_{\text{res}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n dE_i = \int dE \quad (1.14)$$

Das klingt jetzt komplizierter als es eigentlich ist. Am besten rufen Sie sich in Erinnerung, dass wir die Integration in den Grundlagen zur Mathematik im Modul 1 mit dem Grundgedanken der Summe eingeführt haben. Wie genau bei der Bestimmung des resultierenden  $E$ -Feldes mathematisch vorgegangen wird, werden wir uns an zwei Beispielen anschauen.

Das erste Beispiel ist ein kontinuierlich geladener Ring mit dem Radius  $a$  (Abb. 1.9). Wir haben jetzt keinen geraden Stab mehr, sondern der Stab wurde zu einem Ring gebogen. Auf den gesamten Ring haben wir eine Gesamtladung  $Q$  gebracht, welche gleichförmig verteilt ist. Wir haben somit eine Linienladungsdichte, die mit  $\lambda$  (in der Einheit C/m) bezeichnet wird. Wir werden ausrechnen, wie groß das elektrische Feld ist. Hierzu beschränken wir uns auf Punkte auf einer Geraden durch den Mittelpunkt des Rings. Warum wir nur Punkte auf der Geraden wählen und wie die Berechnung erfolgt, wird im Folgenden geklärt.

Beispiel 1: Kontinuierlich geladener Ring

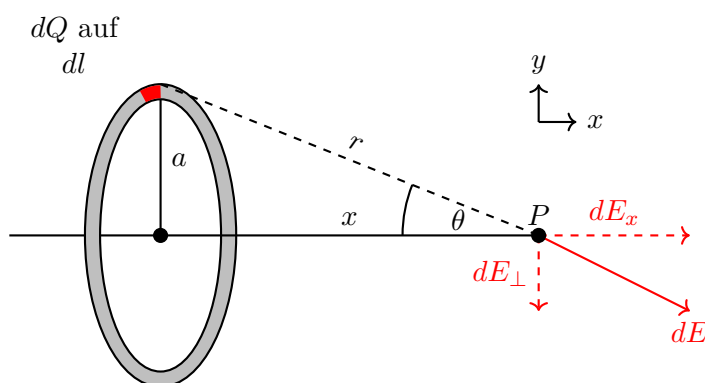


Abb. 1.9.: Kontinuierlich geladener Ring

Wir unterteilen den gesamten Ring in kleine Teilstücke  $dl$ . Auf jedem Teilstück  $dl$  des Rings sitzt die Teilladung  $dQ$ , die im Abstand  $r$  ein Teil- $E$ -Feld  $dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2}$  erzeugt. Wir erhalten das Gesamtfeld  $E_{\text{ges}}$  über die Integration aller Teil- $E$ -Felder (Gleichung 1.15). Wenn wir uns nur für Punkte  $P$  auf der Symmetrieachse durch den Ladungsring interessieren, so werden sich die orthogonalen Komponenten  $dE_{\perp}$  aufheben. Somit

## 1. Das elektrische Feld

bleiben nur die  $x$ -Komponenten der Teil- $E$ -Felder übrig, welche wir als  $dE_x = dE \cdot \cos \theta$  ausdrücken können (Gleichung 1.16). Wir können nun die Formel zur Berechnung von  $dE$  einsetzen (Gleichung 1.17) und stellen fest, dass wir über die Teilladungen  $dQ$  integrieren müssten. Es wäre von Vorteil, wenn wir nicht über die Ladung, sondern über die Geometrie des Rings, also z.B. seine Länge integrieren könnten. Um das zu bewerkstelligen, greifen wir auf die Längenladungsdichte  $\lambda$  zurück, die das Verhältnis von Gesamtladung  $Q$  zu Gesamtstrecke  $U_{\text{Ring}}$  bzw. Teilladung  $dQ$  zu Teilstrecke  $dl$  beschreibt:  $\lambda = \frac{Q}{U_{\text{Ring}}} = \frac{dQ}{dl}$ . Wir können so die Teilladung  $dQ$  über die Längenladungsdichte  $\lambda$  ausdrücken (Gleichung 1.18). Es handelt sich nun um eine Integration über die kleinen Teilstrecken  $dl$ . Um alle Punktladungen auf dem Ring zu berücksichtigen, muss man über den ganzen Umfang des Rings integrieren. Die Integrationsgrenzen sind dabei 0 und  $U_{\text{Ring}} = 2\pi a$ . Im nächsten Schritt ziehen wir alle Größen aus dem Integral, die unter der Annahme eines festen Abstandes  $x$  von  $P$  zum Ring konstant sind (Gleichung 1.19). Es handelt sich nun um ein sehr einfaches Integral, das einfach gelöst werden kann (Gleichung 1.20). Im nächsten Schritt ersetzen wir  $\lambda = \frac{Q}{2\pi a}$  und drücken den Abstand  $r$  von  $P$  zum Ladungsring und den eingeschlossenen Winkel  $\theta$  durch den Abstand  $x$  aus, also den Abstand von  $P$  zur Mitte des Ladungsrings. Hierbei gilt:  $r^2 = a^2 + x^2$  und  $\cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$  (Gleichung 1.21). Wir haben somit bestimmt, wie groß das  $E$ -Feld an allen Punkten  $P$  im Abstand  $x$  von der Mitte des Ladungsrings ist.

gesamtes Feld als Integral der Teilfelder  $E_{\text{ges}} = \int dE$  (1.15)

nur die  $x$ -Komponente ist relevant  $= \int dE_x = \int dE \cdot \cos \theta$  (1.16)

Einsetzen von  $dE$   $= \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{dQ}{r^2} \cdot \cos \theta$  (1.17)

$dQ = \lambda \cdot dl$  einsetzen und Grenzen festlegen  $= \int_0^{2\pi a} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot dl}{r^2} \cdot \cos \theta$  (1.18)

konstante Größen aus dem Integral ziehen  $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{r^2} \cdot \int_0^{2\pi a} dl$  (1.19)

Stammfunktion finden  $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{r^2} \cdot [l]_0^{2\pi a}$

obere und untere Grenze einsetzen  $= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda \cdot \cos \theta}{r^2} \cdot 2\pi a$  (1.20)

alles in Abhängigkeit von  $x$  ausdrücken  $E(x) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot Q}{(a^2 + x^2)^{3/2}}$  (1.21)

Zur Prüfung, ob unser Ergebnis sinnvoll ist, können wir abschätzen, was passiert, wenn wir den Punkt  $P$  unendlich weit weg vom Ring wandern lassen (Gleichung 1.22). Wir erhalten wieder das  $E$ -Feld einer Punktladung, was eine sinnvolle Erwartung ist; wenn wir unendlich weit von einem Ring weg sind, „erscheint“ dieser als Punkt.

## 1. Das elektrische Feld

$$\lim_{x \rightarrow \infty} E(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot Q}{(a^2 + x^2)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x \cdot Q}{x^3} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{x^2} \quad (1.22)$$

Beispiel 2: Homogen geladene Platte

Das zweite Beispiel ist eine kontinuierlich geladene kreisförmige Platte mit dem Radius  $R$ , auf die die Gesamtladung  $Q$  gebracht wurde, welche gleichförmig verteilt ist (Abb. 1.10). Wir haben somit eine Flächenladungsdichte, die mit  $\sigma$  (in der Einheit  $\text{C}/\text{m}^2$ ) bezeichnet wird. Wir werden ausrechnen, wie groß das elektrische Feld ist. Hierzu beschränken wir uns auf Punkte auf einer Geraden durch den Mittelpunkt der Scheibe. Warum wir nur Punkte auf der Geraden wählen, wie die Berechnung erfolgt und wie die Ergebnisse auf eine unendlich große Platte übertragen werden können, wird im Folgenden erläutert.

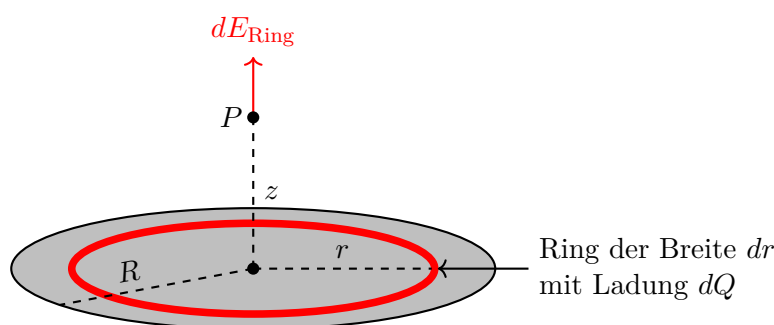


Abb. 1.10.: Homogen geladene Platte

Wir unterteilen die kreisförmige Platte mit dem Radius  $R$  in Ladungsringe mit dem Radius  $r$  und infinitesimal kleiner Breite  $dr$ . Auf jedem Ladungsring sitzt die Teilladung  $dQ$ , die, wie wir aus dem Beispiel 1 wissen, im Abstand  $z$  ein Teil- $E$ -Feld  $dE_{\text{Ring}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot dQ}{(a^2 + z^2)^{3/2}}$  erzeugt. Wir erhalten das Gesamtfeld  $E_{\text{ges}}$  über die Integration aller Teil- $E$ -Felder (Gleichung 1.23). Wir stellen fest, dass wir über die Teilladungen  $dQ$  integrieren müssten und greifen auf die Flächenladungsdichte  $\sigma$  zurück, die das Verhältnis von Gesamtladung  $Q$  zu Gesamtfläche  $A_{\text{Platte}}$  bzw. Teilladung  $dQ$  zu Teilfläche  $dA$  beschreibt:  $\sigma = \frac{Q}{A_{\text{Platte}}} = \frac{dQ}{dA}$ . Die Teilfläche  $dA$  ist die infinitesimal kleine Fläche des Ladungsringes mit der infinitesimalen Breite  $dr$ . Da die Ringe sehr dünn sind, können wir annehmen, dass es sich näherungsweise um Rechtecke der Breite  $dr$  und Länge  $U_{\text{Ring}} = 2\pi r$  handelt. Somit gilt  $dA = dr \cdot 2\pi r$ . Wir können so die Teilladung  $dQ$  über die Flächenladungsdichte  $\sigma$  ausdrücken (Gleichung 1.24). Es handelt sich nun um eine Integration über die kleinen Teilstrecken  $dr$  entlang des Radius der Platte. Um alle Ladungsringe auf der Platte zu berücksichtigen, muss man über den ganzen Radius der Platte integrieren. Die Integrationsgrenzen sind dabei 0 und  $R$ . Im nächsten Schritt ziehen wir alle Größen aus dem Integral, die unter der Annahme eines festen Abstandes  $z$  von  $P$  zur Platte konstant sind (Gleichung 1.25). Es handelt sich hierbei um ein etwas komplizierteres Integral, dessen Stammfunktion aus einer Integrationstabelle abgelesen wird (Gleichung 1.26). Wenn wir

## 1. Das elektrische Feld

die Grenzen einsetzen und vereinfachen, dann haben wir bestimmt, wie groß das  $E$ -Feld an allen Punkten  $P$  im Abstand  $z$  von der Mitte der Platte ist (Gleichung 1.27).

$$E = \int dE_{\text{Ring}} = \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot dQ}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.23)$$

$$= \int_0^R \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{z \cdot \sigma \cdot 2\pi r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} \quad (1.24)$$

$$= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \int_0^R \frac{r}{(r^2 + z^2)^{3/2}} dr \quad (1.25)$$

$$= \frac{z\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left[ \frac{-1}{\sqrt{r^2 + z^2}} \right]_0^R \quad (1.26)$$

$$E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left( 1 - \frac{z}{\sqrt{R^2 + z^2}} \right) \quad (1.27)$$

Insgesamt ist das eine recht unhandliche Formel, die Sie auch nicht auswendig wissen müssen. Sie ist jedoch der Ausgangspunkt für zwei Erweiterungen der vorgestellten Situation. Als erstes stellen wir uns vor, dass wir die Platte unendlich groß werden lassen und betrachten so das  $E$ -Feld in einem gewissen Abstand  $z$  von einer homogen geladenen Ebene (Gleichung 1.28). Wir stellen fest, dass beim Grenzübergang  $R \rightarrow \infty$  die Abhängigkeit vom Abstand  $z$  zur Ebene wegfällt – das  $E$ -Feld ist in allen Abständen gleich groß und nur von der Flächenladungsdichte  $\sigma$  abhängig.

$E$ -Feld einer geladenen Ebene

$$\lim_{R \rightarrow \infty} E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \quad (1.28)$$

Als nächste Erweiterung stellen wir eine vom Betrag her gleich groß geladene positiv und negativ geladene Ebenen einander gegenüber auf und betrachten, wie sich die  $E$ -Felder überlagern (Abb. 1.11). Wir stellen fest, dass sich außerhalb der Ebenen die  $E$ -Felder überall aufheben, da sie in einem beliebigen Abstand gleich groß aber entgegengerichtet sind. Zwischen den beiden Ebenen zeigen die  $E$ -Felder in die gleiche Richtung und addieren sich so zu einem Gesamtfeld (Gleichung 1.29).

$E$ -Feld zwischen zwei Kondensatorplatten

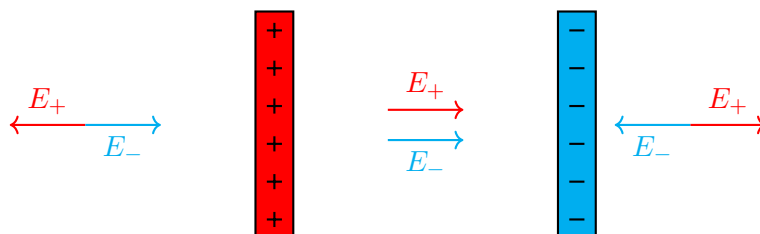


Abb. 1.11.: Zwei unterschiedlich geladene Ebenen – ein Kondensator

## 1. Das elektrische Feld

$$E = E_- + E_+ = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (1.29)$$

Ebenen, also unendlich große Flächen, die sich mit ungleichnamigen Ladungen gegenüberstehen, finden wir als reale Objekte bei Kondensatoren. Wir können also mit dem Ausdruck  $\frac{\sigma}{\epsilon_0}$  das  $E$ -Feld innerhalb eines Kondensators berechnen, wenn wir die Flächenladungsdichte  $\sigma$  kennen.

Zusammengefasst haben wir festgestellt, dass wir die  $E$ -Felder von kontinuierlichen Ladungsverteilungen über die Integration unendlich viele Teilfeldern  $dE$  bestimmen können, die von Teilladungen  $dQ$  erzeugt werden (Abb. 1.12, a). Als Spezialfälle haben wir uns das  $E$ -Feld von Linienladungen, aufgebaut aus kleinen Streckenstücken  $dl$ , mit der Ladungsdichte  $\lambda$  (Abb. 1.12, b), und das  $E$ -Feld von Flächenladungen, aufgebaut aus kleinen Flächenstücken  $dA$ , mit der Ladungsdichte  $\sigma$ , angeschaut (Abb. 1.12, c). Nach dem gleichen Prinzip können auch  $E$ -Felder von Volumenladungen, aufgebaut aus kleinen Volumenstücken  $dV$ , mit der Ladungsdichte  $\rho$ , berechnet werden (Abb. 1.12, d).

Zusammenfassung  
kontinuierliche  
Ladungsverteilungen

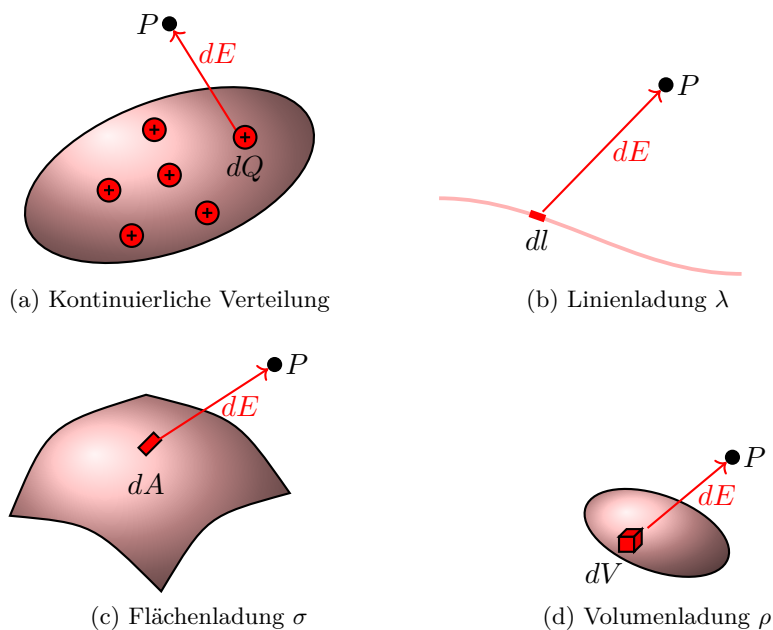


Abb. 1.12.: Kontinuierliche Ladungsverteilungen



### 1.3. Feldlinien

Wie Sie bereits wissen, werden die Stärke und die Richtung des elektrischen Feldes rund um eine Punktladung mathematisch als Vektor beschrieben. Alle Vektoren in verschiedenen Abständen zur Punktladung bilden zusammen ein Vektorfeld – jedem Punkt im Raum wird ein  $E$ -Feld-Vektor zugeordnet, wie beispielsweise bei der positiven Punktladung in Abb. 1.13 (a). Alle Vektorpfeile sind radialsymmetrisch von der Punktladung weg gerichtet. Die Pfeile sind in der Nähe der Punktladung länger als die weiter entfernten, da die Stärke des  $E$ -Feldes nach außen hin abnimmt. Die eingezeichneten  $E$ -Feld-Vektoren stellen natürlich nur eine Auswahl aller möglichen  $E$ -Feld-Vektoren da. Nichtsdestotrotz ergibt sich bereits hier ein relativ anschauliches Bild über die Stärke und Richtung des  $E$ -Feldes um die Punktladung. Man kann diese Aussagen weiter verdeutlichen, indem man die Vektoren mit Linien miteinander verbindet (Abb. 1.13, b) und somit Feldlinien erhält. Die Richtung ist nun durch einen Pfeil pro sogenannter „Feldlinie“ dargestellt.

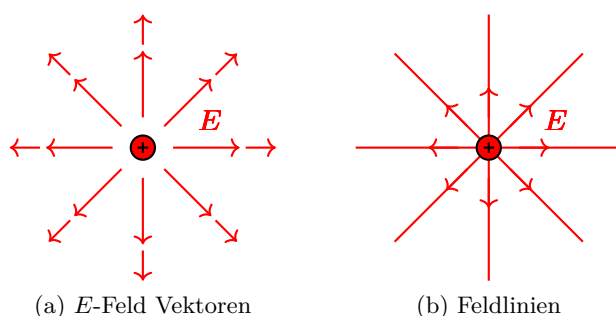


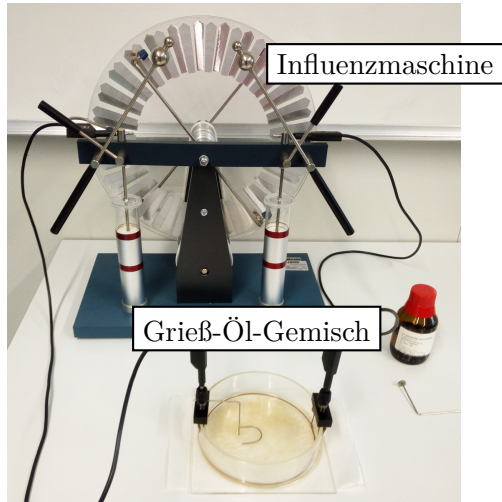
Abb. 1.13.: Feldlinienbild einer Punktladung

Feldlinien sind eine anschauliche Modellierung des  $E$ -Feldes um eine Punktladung. Es ist jedoch experimentell möglich, ein solches Feldlinienbild abzubilden. Um elektrische Feldlinien „sichtbar“ zu machen, benötigt man Rizinusöl, das mit Grießkörnern vermischt ist. Das Grieß-Öl-Gemisch befindet sich in einer Schale, in der zwei Elektroden angebracht sind. Die Elektroden sind mit einer Influenzmaschine zur Ladungstrennung verbunden (Abb. 1.14, a). Durch die Betätigung der Kurbel der Influenzmaschine wird eine Elektrode positiv geladen und die andere negativ. Somit baut sich zwischen den Elektroden ein elektrisches Feld auf. Sobald Grießkörner in ein elektrisches Feld gebracht werden, werden sie zu einem sogenannten Dipol polarisiert – sie besitzen nun eine negative und eine positive Seite (Abb. 1.14, b). Die Dipole werden sich im elektrischen Feld entsprechend ihrer Partialladungen entlang der Feldlinien tangential ausrichten.

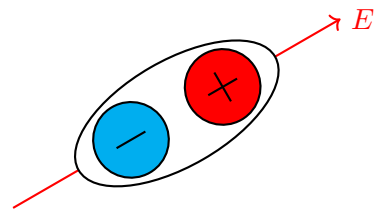
*E*-Feldlinien sichtbar machen

Für die Elektroden können verschiedenen Formen gewählt werden. Beispielsweise kann man das Feldlinienbild einer Punktladung darstellen (Abb. 1.15, a). Die Mitte ist mit dem positiven Pol der Influenzmaschine verbunden, der äußere Ring mit dem negativen Pol. Das sich ergebende Muster im Grieß entspricht den Erwartungen zum Feldlinienbild einer positiven Punktladung, da sich die polarisierten Grießkörner entlang der Feldlinien kettenförmig ausrichten.

1. Das elektrische Feld

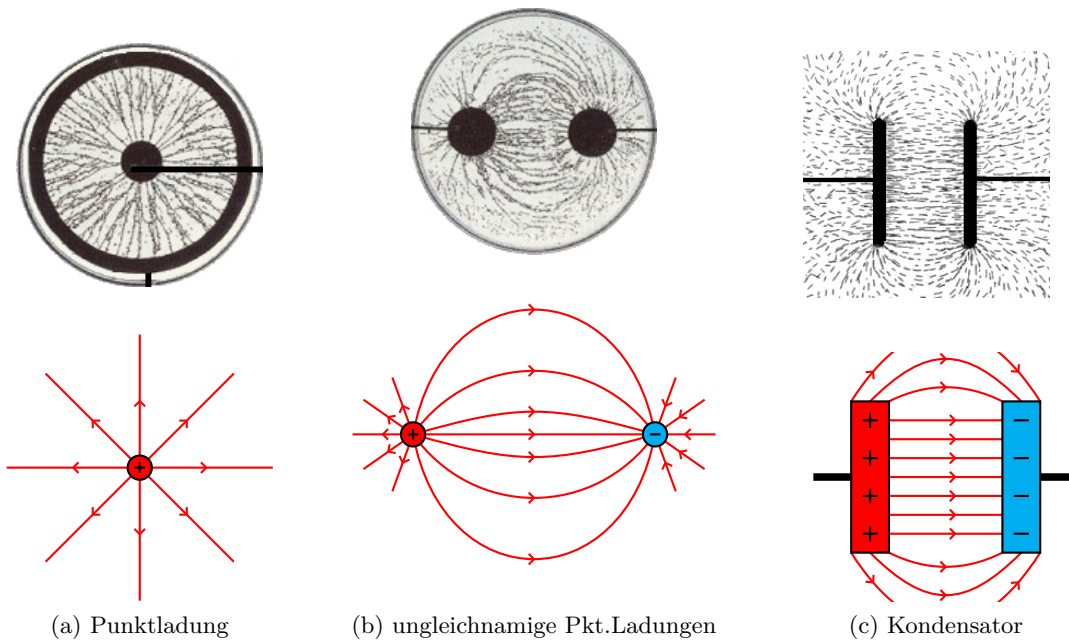


(a) Versuchsaufbau



(b) Polarisiertes Grießkorn im  $E$ -Feld

Abb. 1.14.: Versuchsaufbau um elektrische Feldlinien sichtbar zu machen



(a) Punktladung

(b) ungleichnamige Pkt.Ladungen

(c) Kondensator

Abb. 1.15.:  $E$ -Feldlinien mit Grieß und gezeichnet<sup>2</sup>

## 1. Das elektrische Feld

Als Elektroden können auch andere Formen gewählt werden. Wählt man zwei unterschiedlich geladene Punktladungen, erhält man das in Abb. 1.15 (b) dargestellte Feldlinienbild. Eine weitere wichtige Feldform, mit der wir auch häufig arbeiten werden, ist das sogenannte „homogene  $E$ -Feld“ zwischen zwei Kondensatorplatten. Ein homogenes  $E$ -Feld hat die Eigenschaft, an allen Stellen gleich groß und in die gleiche Richtung gerichtet zu sein. Im Feldlinienbild zeigt sich das dadurch, dass die Feldlinien zwischen den Kondensatorplatten parallel zueinander verlaufen und den gleichen Abstand zueinander haben (Abb. 1.15, c). Wenn Sie das Foto der Lage der Grießkörner und die Skizze der Feldlinien betrachten, stellen Sie fest, dass wir kein 100%ig homogenes  $E$ -Feld haben – an den Rändern des Kondensators sind die Feldlinien gebogen. Dies ist eine physikalische Notwendigkeit, die sich aus den grundlegenden Gleichungen der Elektrodynamik zwangsläufig ergeben muss, wie wir später auch noch zeigen werden. Nichtsdestotrotz werden wir, wenn wir mit den Feldern von Kondensatoren arbeiten, diese so idealisieren, dass wir ein vollkommen homogenes Feld annehmen.

Elektrische Feldlinienbilder sind eine angemessene Form um elektrische Felder graphisch darstellen zu können. Man befolgt bei der qualitativen Darstellung Regeln, die sich aus den quantitativen Zusammenhängen des Vektorfeldes ergeben. Diese Regeln kennen Sie bereits aus Modul 1, als es um die Darstellung von magnetischen Feldlinienbildern ging.

Regeln für das Zeichnen von Feldlinien

Feldlinien zeigen immer in Richtung des elektrischen Feldes. Wenn eine Feldlinie gebogen ist, entspricht die Richtung des  $E$ -Feldes der Tangente, wie z.B. im Punkt  $P$  in Abb. 1.16.

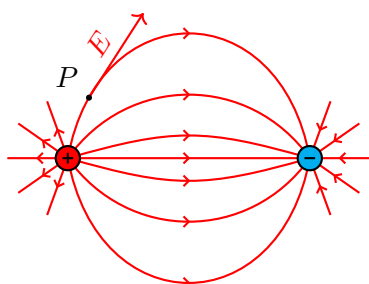


Abb. 1.16.: Feldlinien zeigen in die Richtung des  $E$ -Feld Vektors

Feldlinien werden so gezeichnet, dass die Stärke des  $E$ -Feldes proportional zur Anzahl der Linien durch eine Einheitsfläche senkrecht zu den Linien ist (Abb. 1.17). Je enger die Feldlinien, desto stärker ist das Feld. Am Punkt  $A$  haben wir ein stärkeres Feld als am Punkt  $B$ , da am Punkt  $A$  die Feldlinien enger zusammenliegen. Am Punkt  $C$  haben wir kein  $E$ -Feld, da es hier keine Feldlinien gibt.

Die elektrischen Feldlinien beginnen immer an einer positiven Ladung und enden an einer negativen Ladung. Damit spiegeln sie die Richtung des  $E$ -Feldes, weg von positiven

---

<sup>2</sup>Feldlinien mit Grieß [LEIFIPhysik](#)

## 1. Das elektrische Feld

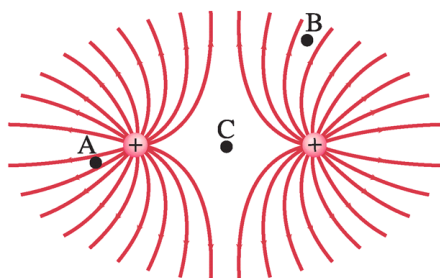


Abb. 1.17.: Dichte der Feldlinien zeigt die Stärke des  $E$ -Feldes, aus Giancoli: Physik.

Ladungen, wider. Zusätzlich zu Informationen zur Richtung kann über die Anzahl der Feldlinien eine Aussage über den Betrag des  $E$ -Feldes gemacht werden (Abb. 1.18). Die Anzahl der ein- bzw. austretenden Feldlinien wird proportional zur Ladungsmenge gezeichnet. An der positiven Ladung  $+Q$  treten 6 Feldlinien aus. An der doppelt so großen Ladung  $-2Q$  treten 12 Feldlinien ein.

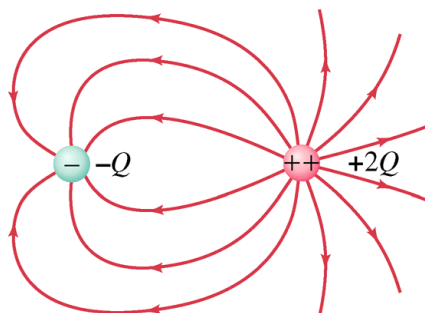


Abb. 1.18.: Anzahl der ein-/austretenden Feldlinien ist ein Maß für die erzeugende Ladung, aus Giancoli: Physik.

Bei der zweidimensionalen zeichnerischen Darstellung von Feldlinienbildern ist noch darauf hinzuweisen, dass wir eigentlich immer einen Fehler hinsichtlich des Abstandsgesetzes machen. Wie wir in der zweiten Regel zur Darstellung von elektrischen Feldlinien festgehalten haben, ist die Stärke des  $E$ -Feldes immer proportional zur Anzahl der Feldlinien durch eine Fläche senkrecht zu den Feldlinien. Im zweidimensionalen Fall wird für die Stärke des  $E$ -Feldes die Anzahl der Feldlinien  $n$  ins Verhältnis zum in Abb. 1.19 (a) blau dargestellten Kreisumfang  $2\pi r$  gesetzt. Das würde allerdings bedeuten, dass die Stärke des  $E$ -Feldes proportional zu  $1/r$  wäre, was jedoch nicht richtig ist. Wir wissen, dass bei einer Punktladung ein quadratisches Abstandsgesetz gilt.

Aufpassen bei der Interpretation von 2D Feldlinien

Die falsche Schlussfolgerung ergibt sich dadurch, dass wir das  $E$ -Feld um eine Punktladung zeichnerisch oft nur als zweidimensional betrachten. Schauen wir uns eine dreidimensionale Darstellung an (1.19, b), also  $E$ -Feldlinien, die eine Kugelschale durchdringen, stellen wir fest, dass wir für die Stärke des  $E$ -Feldes die Anzahl der Feldlinien  $n$  ins Verhältnis zur Kugeloberfläche  $4\pi r^2$  setzen. Dem entspricht, dass die Stärke des  $E$ -Feldes

## 1. Das elektrische Feld

proportional zu  $1/r^2$  ist und so dem quadratischen Abstandsgesetz folgt.

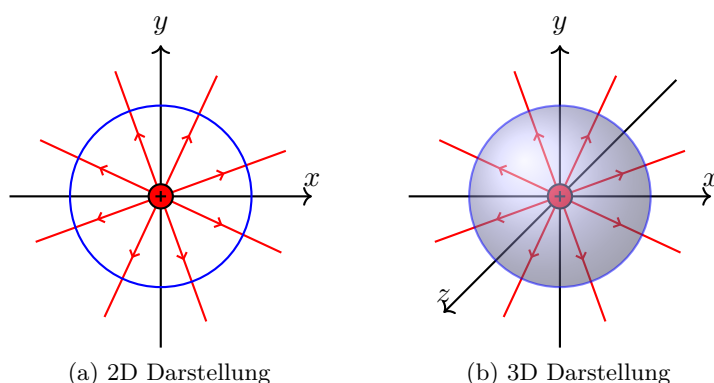


Abb. 1.19.: Aufpassen bei der Interpretation von 2D Feldlinien

Uns sollte bei der Darstellung von Feldlinienbildern immer bewusst sein, dass die zweidimensionale Darstellung zwar einen guten Überblick über das  $E$ -Feld gibt wir aber nichtsdestotrotz in einer zweidimensionalen Darstellung einen Fehler hinsichtlich des Abstandsgesetzes machen.

Zum Abschluss der Feldlinienbilder möchte ich mir mit Ihnen noch Besonderheiten von elektrischen Feldlinien bei (metallischen) Leitern anschauen. Wenn wir das Innere eines Leiters einem elektrischen Feld aussetzen, dann wirkt eine resultierende Kraft auf die frei beweglichen Ladungen (Elektronen) im Leiter. Als Folge dessen werden die Elektronen sich entlang der Feldlinien bewegen. Die Elektronen werden sich so lange bewegen, bis keine resultierende Kraft mehr auf sie wirkt und sich ein sogenanntes elektrostatisches Gleichgewicht eingestellt hat. Beim elektrostatischen Gleichgewicht ist nicht nur die resultierende Kraft auf eine Ladung 0, sondern auch das resultierende  $E$ -Feld. Daraus folgt, dass im statischen Fall, also bei ruhenden Ladungen, das  $E$ -Feld innerhalb eines Leiters 0 sein muss, da sich ja sonst noch Ladungen bewegen würden. Hieraus ergeben sich weitere Konsequenzen für die Lage der Ladungen und Ausrichtung von  $E$ -Feldern bei Leitern.

Die Ladung von Leitern sammelt sich immer an der Oberfläche an (Abb. 1.20). Bei einem negativ geladenen Leiter stoßen sich alle negativen Ladungen gegenseitig ab und bewegen sich zur Oberfläche, sodass die Ladungen möglichst weit voneinander entfernt und gleichmäßig verteilt sind. An der Oberfläche ruhen die Ladungen, da sich ein Gleichgewicht zwischen der Abstoßung der negativen Ladungen und dem „Gegendruck“ der Leiterwand<sup>3</sup> einstellt.

Leiter „unterbrechen“ elektrische Felder. Wenn wir eine positive Punktladung in einer geschlossenen Kugelschale haben (Abb. 1.21), wird die Punktladung von einem radialen Feld umgeben sein, das an der Kugelschale enden muss, da innerhalb eines Leiters kein

Feldlinien bei  
metallischen Leitern

<sup>3</sup>Es ist natürlich nicht so, dass eine „Leiterwand“ die Elektronen zurückhält. Die Elektronen werden vom Atomgitter „gehalten“. Um sie hieraus zu entfernen, sind größere Energiemengen notwendig, die durch die elektrostatische Abstoßung alleine (bei moderaten Spannungen) nicht aufgebracht werden können.

## 1. Das elektrische Feld

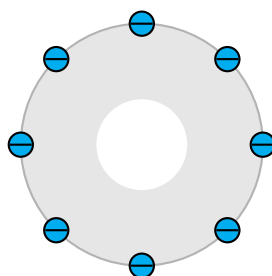


Abb. 1.20.: In metallischen Leitern sammeln sich die Ladungen an der Oberfläche

$E$ -Feld existieren kann. Durch die elektrostatische Kraftwirkung werden frei bewegliche negative Ladungsträger aus dem neutralen metallischen Leiter von der positiven Punktladung angezogen und wandern an die Innenseite der Kugelschale. Sie kennen dies als das Phänomen der Influenz. An diesen negativen Ladungsträgern enden die Feldlinien der Punktladung. Da die Kugelschale insgesamt elektrisch neutral ist, werden durch die Anziehung der negativen frei beweglichen Ladungsträger an der Außenseite positive Ladungen zurückgelassen, von der wieder Feldlinien nach außen weitergehen. Das  $E$ -Feld der Punktladung existiert somit auch außerhalb der Kugelschale, im Leiter selbst ist es jedoch „verschwunden“.

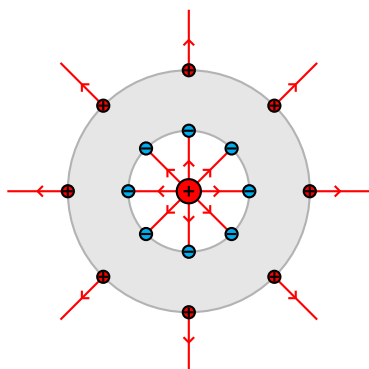


Abb. 1.21.: Elektrische Felder werden von metallischen Leitern „unterbrochen“

Bei guten Leitern stehen die Feldlinien immer senkrecht auf dem metallischen Leiter (Abb. 1.22, a). Gäbe es eine Komponente von  $E$  parallel zur Oberfläche (Abb. 1.22, b), so würden sich die Elektronen aufgrund dieser Kraft so lange entlang der Oberfläche bewegen, bis sie eine Position erreichen, wo keine resultierende Kraft mehr auf sie parallel zur Oberfläche ausgeübt werden würde, das heißt, bis das elektrische Feld senkrecht zur Oberfläche wäre.

Abschließend anzumerken ist, dass die Eigenschaften nur Leiter, z.B. Metalle, betreffen, in denen es freie Ladungen gibt. Im Inneren eines Nichtleiters, z.B. einer Gummikugel, welche keine freien Elektronen hat, kann ein  $E$ -Feld existieren und die Feldlinien stehen nicht zwangsläufig senkrecht auf der Oberfläche.

## 1. Das elektrische Feld

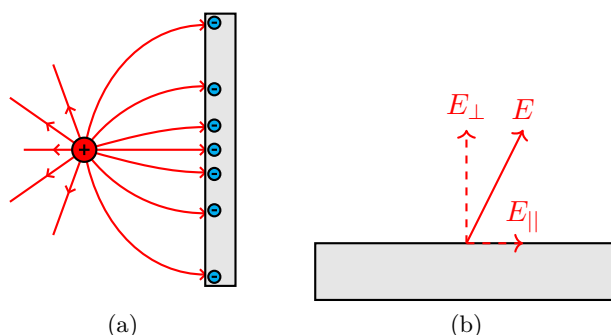


Abb. 1.22.: Feldlinien stehen immer senkrecht auf metallischen Leitern

Wie bereits gesagt, kann innerhalb von Leitern kein  $E$ -Feld existieren. Dies gilt auch, wenn sich innerhalb des Leiters ein Hohlraum befindet. Die Feldfreiheit in einem sogenannten „Faraday-Käfig“ kann z.B. mit Grießkörnern gezeigt werden (Abb. 1.23). Innerhalb des Rings, der sich zwischen zwei Kondensatorplatten befindet, sind die Grießkörner vollkommen ungeordnet, was die Feldfreiheit zeigt.

Faraday-Käfig

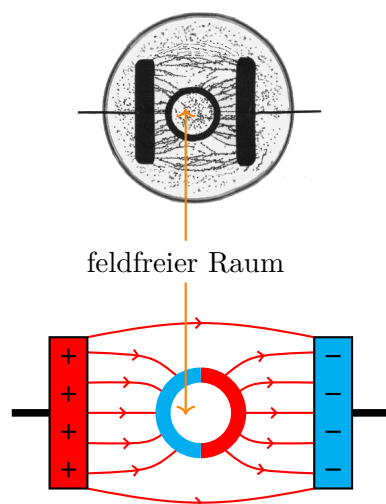


Abb. 1.23.: Feldfreier Raum mit Grießkörnern sichtbar gemacht<sup>4</sup>

Die Existenz des feldfreien Raums im Faraday-Käfig kann über die Superposition von  $E$ -Feldern erklärt werden. Wir haben eine negative und eine positive Kondensatorplatte, zwischen denen ein homogenes elektrisches Feld vorliegt, das von links nach rechts verläuft. Wir bringen nun einen Hohlkörper aus Metall, unseren „Käfig“, in das  $E$ -Feld (Abb. 1.24, a). Aufgrund der Influenz werden sich auf der linken Käfigseite negative, auf der rechten Käfigseite positive Ladungsträger ansammeln. Es wird so viel Ladung induziert, dass auf jeder Feldlinie durch den Käfig genau eine Ladung auf dem Käfig liegt

<sup>4</sup>Feldlinien mit Grieß [LEIFIphysik](#)

## 1. Das elektrische Feld

(Abb. 1.24, b). Im Käfig selbst liegen sich nun negative und positive induzierte Ladungsträger gegenüber, wie bei einem zweiten Kondensator. Auch hier wird sich aufgrund der induzierten Ladungen ein  $E$ -Feld ausbilden, orange dargestellt, das von rechts nach links verläuft (Abb. 1.24, c). Das  $E$ -Feld des Kondensators und das orangene  $E$ -Feld der auf dem Käfig induzierten Ladungen sind einander entgegengerichtet und gleich groß, da auf jeder Feldlinie eine orangene Feldlinie liegt. Die Felder überlagern sich ungestört (Superposition) und löschen sich aufgrund ihrer unterschiedlichen Ausrichtung bei gleicher Größe vollständig aus. Somit haben wir innerhalb des „Käfigs“ einen feldfreien Raum (Abb. 1.24, d).

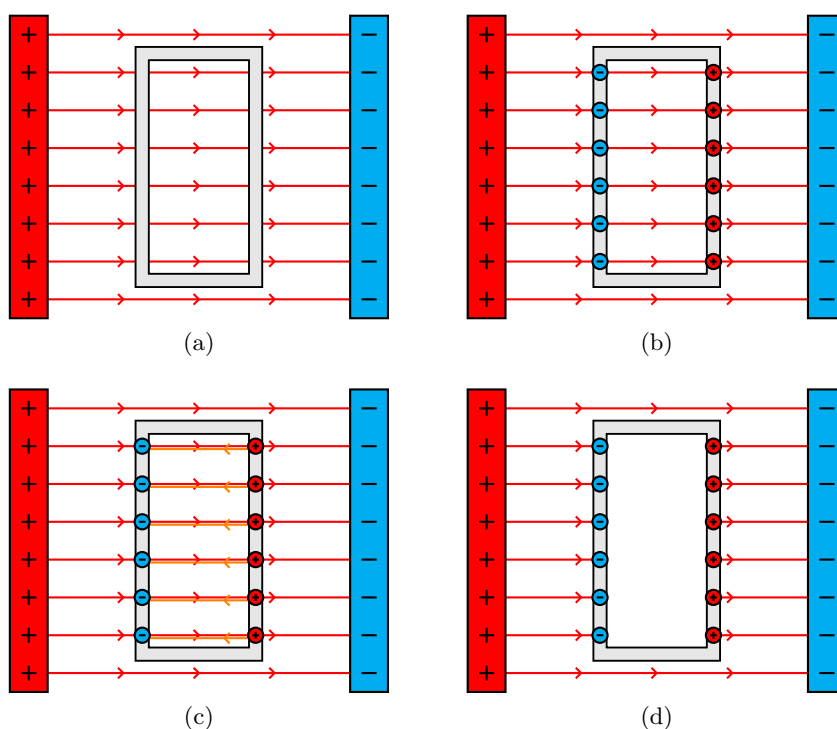


Abb. 1.24.: Erklärung zum Faraday-Käfig

### 1.4. Elektronen in Längs- und Quersfeldern

In diesem Kapitel zu elektrischen Feldern werden wir das Verhalten von geladenen Teilchen in Feldern betrachten. Hierbei werden wir zwei Situationen betrachten. Einerseits elektrisch geladene Teilchen, bei uns oft Elektronen, die ein homogenes  $E$ -Feld, z.B. von einem Kondensator, parallel zu den Feldlinien passieren (Abb. 1.25, a) und andererseits Elektronen, die sich anfänglich orthogonal zu den  $E$ -Feldlinien bewegen (Abb. 1.25, b). Ist das elektrische Feld bekannt, kann die Bahn einer Punktladung relativ einfach berechnet werden. Hierbei werden wir auf Ihr Vorwissen in der Mechanik zurückgreifen und